中学校数学授業における数学的活動の組織化に関する研究

理解・問題解決・否定論の視点からの授業づくり

関谷卓也（教育実践コース）

1　本研究の目的と構成

変化の激しい社会を生きる力を育むために，数学の授業はどうあるべきであろうか。授業者がすでに出来上がっている数学を教え込む授業では，変化に対応できる力は育まれない。「事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決し，解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする過程」を遂行する（中央教育審議会, 2016, p. 5）数学的活動を通した授業が求められている。

しかしながら，永田(2018)の調査によると，数学的活動を通した指導の実施状況は低い。その原因の一つとして，授業の準備に手間がかかることがある。授業の準備とは，教材研究や働きかけの構想などであろう。

このような数学教育の大きな課題を踏まえ，本研究では以下に焦点を当てることとした。

数学授業における，教師の働きかけの在り方や，教材分析の方法を明らかにすること

2　生徒の思考を考察する枠組みとしての「2 軸過程モデル」に着目して

本章では，数学教育における包括的な視点として，「生徒の数学の理解はどのようになされるのか」を研究課題に設定した。そして，理解についての先行研究を調査し，先行研究に基づき設定した視点から，自身の授業を分析した。

(1) 理解についての先行研究

規範性をもつ小山(2010)の理解の 2 軸過程モデルに注目した。2 軸過程モデルでは，数学的思考の段階を，直観的思考・反省的思考・分析的思考に整理している。この段階を通して生徒の理解が深まり，学習の水準が高まっていく。

(2) 2 軸過程モデルの視点からの授業分析

2 軸過程モデルの視点から，「式の展開の導入」「平方根の導入」「平方完成」などの授業 5 時間を設計し，分析を行った。授業中の事実より，以下が示唆された。

- 生徒が分析的思考をすることにより，方法の対象化がなされ，学習の水準が高まること。
- 生徒が反省的思考をすることが，生徒が追究の方法を見出すことに有効であること。
- 直観的思考をした生徒の方が，直観的思考をできなかった生徒に比べ，反省的思考・分析的思考をしやすいこと。

3　教師の働きかけを考察する枠組みとしての「問題解決の授業」に着目して

直観的思考の場面で考えあぐねている生徒は，反省的思考・分析的思考の場面でも考えあぐねている姿が見られた。そこで，生徒が直観的思考を用いることが多い自力解決の過程を含む「問題解決の授業」に注目した。そして，授業における教師の働きかけに焦点を当て，「問題解決の授業における教師の働きかけはどのようにすればいいか」という研究課題を設定した。そして，先行研究を調査し，設定した視点から自身の授業を分析した。

(1) 問題解決についての先行研究

自力解決を促す働きかけである問題の提示と課題の設定に注目した。なお，「問題解決の授業」では，問題と課題が区別されている。

問題については，「生徒に適度な困難を伴って『オヤ？』という感じをもたせるような問題を与えること」（相馬, 1986. p. 28）が必要である。

また，課題とは生徒のもつ問いではなく，「問題の解決過程で生じるさらにはっきりさせなければならない事柄」である。（相馬, 1986. p. 28）

(2) 問題解決の視点からの授業分析

「問題解決の授業」の視点から，「円の性質の導入」「円の外部の点を通る接線」などの授業 5 時間を設計し，分析を行った。授業中の事実より，以下が示唆される。

- 条件変更などの工夫をして，既習と関連付けた問題を提示することが，生徒の関心の高まりや，生徒の見通しの設定に有効であること。
- 生徒が問題解決の際に，既習では解決が困難であることを認識したり，その困難さを記述したりすることが，課題の設定に有効であること。
- 自力解決に必要な見通しは個によって異なること。

４　概念形成を考察する枠組みとしての「否定論」に着目して

３章の問題解決に関する研究において，既習の概念との関係や，教師の発問によって生徒が困難さを感じている姿があった。このことから，教材の構成に着目することとし，「教材の解釈をどのようにすればよいか」という研究課題を設定した。

既習による新しい概念の形成を，否定に基づいて考察した理論として，岩崎(1992)の「否定論」に着目した。「否定論」に関する先行研究を調査し，それに基づき設定した視点から，自身の授業を分析した。

(1) 否定論について

岩崎(1992)は，「Aであることを規定するすべての非AがAの本質である」(岩崎, 1992, p. 16)と述べ，概念の本質の規定には，否定が欠かせないことを述べている。そして，素数を例にして，否定に基づく概念形成理論を提案した。

大谷(2015)は，岩崎の否定に基づく概念形成の過程を表１のように，「外延の限定－内包の明確化－概念の再構成」の３段階で整理している。なお，外延とは，その概念の適応される事例の集合である。内包とは，その概念が共通に持っている性質である。

表１　否定に基づく概念形成の段階
(大谷, 2015, p. 117 を一部修正)

外延の限定	既習の外延的否定により，既習の外延が限定される段階
内包の明確化	既習の内包的否定により，本習の内包が明確になる段階
概念の再構成	本習の外延的否定や内包的否定により，既習と本習が再構成される段階

(2) 否定論からみた授業づくりの視点

否定論の視点で，教材を分析すると，以下のように授業を構想することができる。

外延の限定

問題解決の過程で，新しい問題が既習の内包を適応させても解決できないことに気付くと，生徒は困難さを認識する。この困難さにより課題が設定される。

内包の明確化

外延の限定で明確になったように，新たな問題は既習の内包では解決ができない。ここで，なぜできないかを考えることは見通しの設定につながる。また，解決ができないとはいっても，学校数学は基本的に既習の数学によって，新たな数学を形成することができる。つまり，様々な既習を組み合わせたり，既習を修正したりすることで，課題を解決することができる。つまり，つまり内包の明確化では課題が解決される。

そして，既習の内包との違いを考慮しながら，課題の解決を振り返ることによって，新たな概念が形成される。

概念の再構成

この段階は，形成された本習の視点から既習を見直すことで，既習と本習が再構成される段階である。このことは，授業のまとめにつながる。

(3) 否定論の視点からの授業分析

前節で示した授業づくりの視点を基に，「連立方程式の代入法」「一次式の減法」「反比例の導入」などの授業21回を実践した。本稿では「反比例の導入」について述べる。

① 授業設計

まず，既習の概念を想定する。反比例の概念を形成するための既習は比例である。よって，比例を否定することで，反比例の概念を形成していく。比例を否定するには，比例が通用しない問題が必要である。そこで，視力と図１のようなランドルト環の関係についての追究を促す。

視力とランドルト環の関係を否定論の視点から分析すると表２のようになる。

図１　ランドルト環

表２　否定論：比例と反比例

外延の限定	比例ではない関係に気付き，「視力とランドルト環の関係にはどのような関係があるのだろう？」と課題をもつ。
内包の明確化	比例の特徴を修正することを通して，反比例の表の特徴を見出し，問題を解決する。 反比例の表の特徴を整理する。
概念の再構成	比例と関連付けながら，反比例の表の特徴をまとめる。

② 授業の実際

2021年11月18日，19日に市立中学校で実施，生徒数は28名。

外延の限定の段階

授業者は視力検査表を提示し，ランドルト環を紹介した。そして，ある外国人の視力が5.0だったことを紹介し「視力5.0を測るランドルト環の大きさを求めよう。」と問題を提示した。

続いて，定規でランドルト環の大きさを測定するように促し，以下の表３のようにまとめた。

表３　視力と直径の関係

視力	0.1	0.3	0.7	1.0
直径	7.4	2.5	1.05	0.72

以下はこの後の発話記録の一部である。

T:「1.0 の時 0.72 ということは，５倍したら５倍にすればいい。
0.72×5 は 3.6 ㎝。答えが出たね。」
S「違う」
（個人で考える時間とペアで交流する時間）
S「いきなり直径が広くなることはないから，おかしい。」
S「一番最初の 0.1 は 7.4 で，0.3 の時も 0.1 の直径を３倍になっているはずだから（中略）そこはなっていないから，この先もならない。」
S「視力は増えていくにつれて，直径は減っていっているので，これは比例じゃない」
T「比例ではないということはこの表にはきまりなんかないのですか?」
S「あるはず。」
T「では，説明できますか?」
S「…」

このような発話を踏まえて，「視力とランドルト環の大きさには，どのような関係があるだろうか？」を課題として設定した。

内包の明確化の段階

授業者は３倍でないということは，何倍だろうと問いかけた。また，比例の性質は使えないが，比例の調べ方は使えることを示唆した。そして，どのように追究するかをグループで相談するように促した後，個人追究を促した。

授業者の見取りによると，この時点で視力が３倍なら直径は 1/3 であることに気づいていた生徒は５名である。また，視力×直径が一定であることに気づいた生徒は１名である。抽出生をはじめとする多くの生徒は 2.5÷7.4=0.33783783…を求めたが，1/3 になることに気づかなかったり，考えあぐねたりしていた。

しばらく時間をとり，全体でどのように調べているかを交流した。そこで時間となり１時間目を終えた。

２時間目において，授業者は最初に「何が分かって，何が分からないか」について発言を促した。抽出生は「0.1 から 0.3 で×３を計算して，7.4 から 2.5 が小数なら表せるけど，分数に表すところがよく分からない。」と述べた。

授業者は具体例を挙げたり，生徒とやり取りをしたりしながら，7.4÷2.5=2.96 であるので，7.4 から 2.5 は÷2.96 がされていることを確認した。そして，÷2.96 は÷約３なので，×1/3 になることを確認した。そして，再び自力解決を促した。

その後，ロイロノートへ提出を促した。ロイロノートの提出状況は以下である。

「視力が７倍なら直径は 1/7 倍になること」に気づいていた。	10 名
「視力×直径がほぼ一定であること」に気づいていた。	５名
	(内４名は上の項目も記述)
その他	７名
未提出	10 名

抽出生は，図２のように整理することができた。

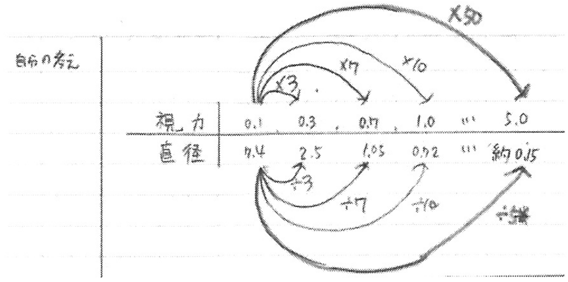

図２ 抽出生の記述（×50 はこの時点で未記入）

全体で視力とランドルト環の関係を確認した後，授業者は視力 5.0 の時のランドルト環の大きさを求めるように促した。授業者の見取りだと約 14 名が視力 1.0 の時の直径である 0.72 に 1/5 をかけて求めていた。また，３名が視力×直径の 0.74 を視力の 5.0 で割って求めていた。

内包の明確化は，この後の解決方法を振り返り概念を形成することも含むが，そのことは続く概念の再構成と共に述べる。

概念の再構成の段階

授業者は，課題が「視力とランドルト環の大きさには，どのような関係があるだろうか？」であることを確認し，「もう １ 回関係そのものに目を向けましょう。比例ですか？」と問い掛けた。生徒は「いいえ」と応答した。そして，「比例は・・・だったけど，この関係は・・・だ」と板書し，この話型にそって関係を整理するように促した。そして，ロイロノートへの提出を促した。

抽出生は図３のように記入した。

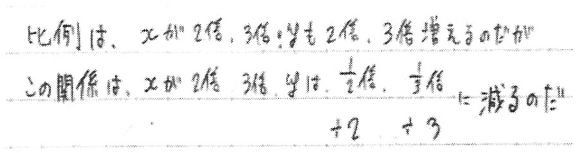

図３ 抽出生の記述

ロイロノートへの提出状況を見ると，抽出生と同様の記述をした生徒は 13 名，また，「比例は片方の数量×もう片方の数量をしても一定の数にならないが，この関係は，片方の数量×もう片方の数量をすると一定の数になる」と記述した生徒も１名いた。この２つの特徴をまとめとして板書し，授業を終えた。

③ 授業の分析と考察

外延の限定

教師の提示した比例の内包を適応させた解決方法に対して，「違う」と否定をする姿があった。また，どのような関係かを説明できないという困難さから，課題を設定していた。

この姿から，既習の内包をそのまま当てはめるとうまくいかないことによって，生徒が困難さを感じ課題が設定できることが示唆される。

内包の明確化

授業者は，比例の調べ方を参考にすることを示唆するなど，見通しにつながる働きかけはしたが，１時間目はほとんどの生徒が動かなかった。この姿から，自力解決にはより具体的な見通しが必要であることが示唆される。

また，２時間目においては，ロイロノートによると 11 人の生徒が，7 倍になると 1/7 倍になること等を見出していた。この姿から，見通しを獲得していると既習を修正し，課題を解決できることが確認できる。一方で，未提出の 10 名の生徒についての働きかけは課題として残る。

内包の明確化は，この後の解決方法を振り返り概念を形成することも含むが，そのことは続く概念の再構成と共に述べる。

概念の再構成

13 人の生徒が「比例は x が 2 倍，3 倍になると y も 2 倍 3 倍になるが，この関係は x が 2 倍，3 倍になると，y は 1/2 倍，1/3 倍になる。」と比例と関連付けて整理することができていた。

また，1 人の生徒は「比例は片方の数量×もう片方の数量をしても一定の数にならないが，この関係は，片方の数量×もう片方の数量をすると一定の数になる。」と比例と関連付けて整理をした。

そして，これらの考えを授業のまとめとすることができていた。

これらの姿から，授業の最後に「どうして解けなかったか？どうして解けるようになったか？」に注目し，学習課題を中心に問題解決を振り返ることは，概念の形成と概念の体系化に繋がることが示唆される。

５　本研究の成果と今後の課題

(1)　本研究の成果

研究の目的である「数学授業における，教師の働きかけの在り方や，教材分析の方法を明らかにすること」について，数学的活動の過程に沿って述べる。

事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし

- 問題を解く過程で，生徒は既習が通用しない困難さを感じる。このことによって，課題が設定される。

問題を自立的，協働的に解決し

- 理解には，自力解決が重要である。自力解決には，既習をどのように否定，修正するかという見通しが必要である。
- 協働的に解決には，他者に説明することで，自分の考えを振り返るといった意味がある。また，以下のような教授行動を行う。

○　全体での発表を途中で止めて他の生徒にも続きを考えるように促す。

○「なぜそう考えたか？」「ここから何が言えるか？」と問いかける。

解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したり

- 問題解決の後に，課題に立ち返り「どうして解けなかったか？どうして解けるようになったか？」を振り返るように促す。解けるようになった理由が，概念の形成であり，既習と本習を結びつけることが概念の体系化である。

(2)　今後の課題

本研究において，課題として明らかになったことは，見通しの設定についてである。見通しをもてなければ自力解決ができない。そして，自力解決ができなかった生徒は，他者の考えを聞いても理解をすることが困難である。しかしながら，いつも学級で具体的な見通しを整理していると，見通しが与えられなければ解決ができない生徒になりかねない。

この課題の解決や，さらなる授業改善を目指して，今後も理論と実践を往還しながら学び続けていく。そして，学んだことを広げていく。

引用文献

中央教育審議会. 2016 年. 「算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめについて（報告）」. https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/__icsFiles/afieldfile/2016/09/12/1376993.pdf (2022 年 1 月確認).

岩崎秀樹. 1992 年. 「数学学習における「否定」の研究(1)」，日本数学教育学会『第 25 回数学教育論文発表会論文集』.

小山正孝. 2010 年. 『算数教育における数学的理解の過程モデルの研究』. 東京：聖文新社.

永田潤一郎. 2018 年. 『中学校新学習指導要領　数学的活動の授業デザイン』. 東京：明治図書出版株式会社.

大谷洋貴. 2015 年. 「統計的概念の形成過程に関する研究：否定論に着目して」，全国数学教育学会『数学教育学研究』，第 21 巻，第 2 号.

相馬一彦. 1986 年. 「問題の解決過程を重視する指導－数学教育と問題解決－」，小林善一監修『算数・数学教育実践講座〈第 19 巻〉問題解決』. 東京：ニチブン・日本文教社.